Géométrie des masses

P9-12 – Cinématique – Chapitre 3

I. Masse m et centre de masse G

$$m = \int_S dm = \int_S \rho \, d\tau$$

$$\int_S \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{CM} \, dm$$

$$\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CG_i}} \quad (m = \Sigma m_i)$$

m (kg) : masse du solide
dm (kg) : masse élémentaire
ρ (kg/m^x) : masse linéique / surfacique / volumique
$d\tau$ (m^x) : élément linéique / surfacique / volumique

S : solide étudié
M : point du solide
G : centre d'inertie / de masse / de gravité
C : point quelconque
(m_i, G_i) : masse et centre des sous-systèmes

II. Opérateur d'inertie

1. Définition

$\overline{\overline{I_0(S)}}$ **opérateur d'inertie de S :**

$$\overline{\overline{I_0(S)}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array}$$

A, B, C : moments d'inertie :

$$A = I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) \, dm$$

$$B = I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) \, dm$$

$$C = I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) \, dm$$

D, E, F : produits d'inertie :

$$D = I_{Oyz} = \int_S yz \, dm$$

$$E = I_{Oxz} = \int_S xz \, dm$$

$$F = I_{Oxy} = \int_S xy \, dm$$

2. Symétries matérielles

Lorsqu'un solide possède un plan de symétrie, les produits qui comportent la normale au plan de symétrie s'annulent.

3. Théorème de Huygens

$$\boxed{\overline{\overline{I_0(S)}} = \overline{\overline{I_G(S)}} + \overline{\overline{\mathbb{C}}}}$$

$$\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

$$\overline{\overline{\mathbb{C}}} = m \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & (a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & (a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$